

ESTUDO DOS MÉTODOS DE FILTRAGEM DIGITAL APLICADO A ANÁLISE DE FREQUÊNCIA EM PROBLEMAS DE DINÂMICA ORBITAL. - Helton da Silva Gaspar, Ernesto Vieira Neto, Othon Cabo Winter. - Astronomia - Mecânica Celeste – Física - Departamento de Matemática - Faculdade de Engenharia - Campus de Guaratinguetá.

O emprego do método de análise de frequências, via FFT – *Fast Fourier transform* (Transformada rápida de Fourier) – no estudo de problemas de dinâmica orbital que foi realizado em um projeto anterior satisfaz nossas expectativas quanto à classificação de sistemas caóticos e regulares. Contudo, encontramos algumas dificuldades para aplicação do método em larga escala devido a uma interferência de ruído presente na contagem de picos do espectro de potências. Assim, o presente documento apresenta os resultados de um estudo dos métodos de filtragem digital realizado com o intuito de tentar utilizá-los na remoção dos ruídos numéricos.

O método de análise de frequências consistia basicamente em:

- Integrar numericamente o problema de três corpos de modo a obter a variação temporal dos elementos orbitais, semi-eixo maior e excentricidade.
- Obter a transformada de Fourier destes dados
- A partir dos dados da transformada de Fourier obter o espectro de potências.
- Analisando os gráficos dos espectros de potências constatamos que os gráficos relativos às órbitas irregulares apresentam maior número de picos.

A figura (1) ilustra o método utilizado:

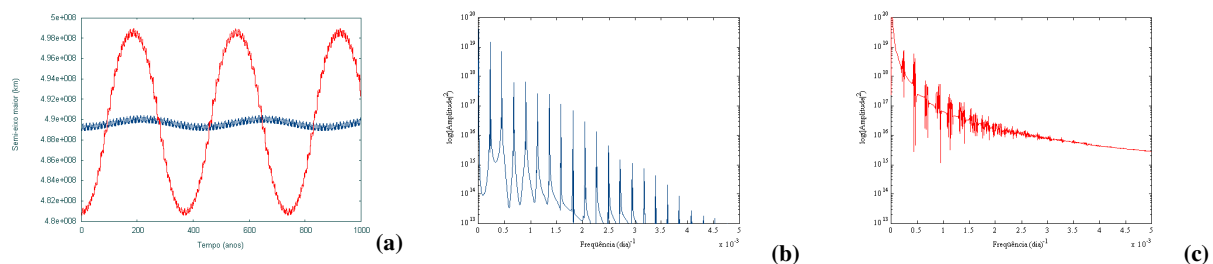


Fig.1 O gráfico (a) apresenta a variação do semi-eixo para duas órbitas com condições iniciais diferentes. A órbita plotada em azul apresenta comportamento regular enquanto que a órbita plotada em vermelho apresenta comportamento irregular. Em (b) e (c) os espectros de potencia das órbitas regular e caótica respectivamente, ilustra o maior número de picos para a segunda.

Apesar deste método apresentar boa concordância encontramos uma incoerência ao tentar aplicá-lo em larga escala, aplicação que consiste em realizar os procedimentos descritos para toda uma gama de condições iniciais (R_0, V_0) ¹ e colecionar o número de picos referentes a cada uma destas em um arquivo para gerar um “mapa” de cores, associando-se os números de picos às cores (ver fig.2.a).

A incoerência mencionada acima se refere a uma translação da figura obtida por nosso método em relação à obtida através de um mapeamento pelo método das seções de Poincaré (Winter & Murray 1994) (ver fig.2.b).

Acreditamos que esta translação seja um problema devido ao “ruído computacional” agregado aos dados gerados pelos processos numéricos. Uma vez que utilizamos escala logarítmica para estudar o espectro de potências, observamos que o “ruído” ao ser ampliado, devido à aplicação do logaritmo, interfere de maneira considerável no processo de contagem de picos.

Com o objetivo de remover o ruído de nossos dados, realizamos o estudo de algumas técnicas de filtragem digital.

¹ R_0 e V_0 são posição inicial e velocidade inicial respectivamente.

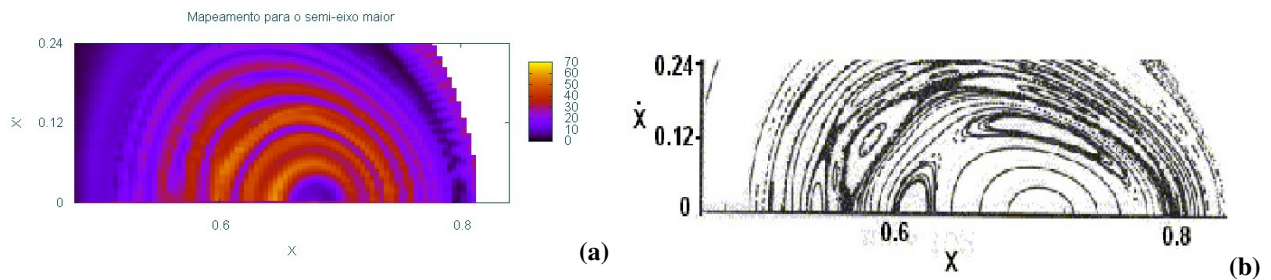


Fig.2 (a) Mapeamento realizado através da associação de cores ao número de picos do espectro de potência, como mostra a legenda, da órbita com condição inicial (x, \dot{x}) . (b) Mapeamento realizado através da técnica de seção de Poincaré, regiões mais escuras representam sistemas com comportamento mais irregular.

Três principais métodos foram estudados, como segue:

- Filtros de média
- Filtragem por Shrinkage via transformadas ondeletas
- Filtragem por Shrinkage via transformadas de Fourier

Filtros de média

O método dos filtros de média consiste basicamente em tomar a média aritmética entre três pontos consecutivos do vetor contendo o sinal e substituir o valor do ponto central pela média calculada. Deste modo o filtro de média proporciona um alisamento da curva. Este método pode ser aplicando diversas vezes consecutivas para obter melhores resultados, o que caracteriza um alisamento progressivo em relação ao número de aplicações realizadas.

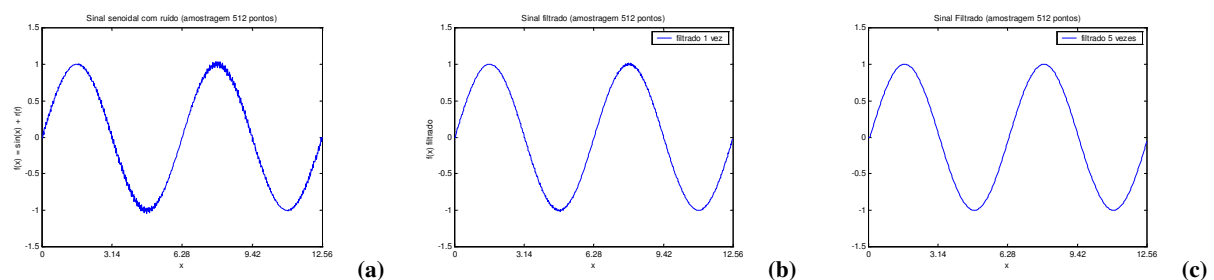


Fig.3 Ilustração do método de filtros de média. Em (a) temos um sinal senoidal do qual se deseja remover o ruído. Aplicando o filtro de média verificamos que houve uma suavização parcial do sinal (b), aplicações consecutivas são realizadas até obter um sinal alisado, em (c) ilustramos o resultado de cinco aplicações consecutivas.

Filtragem por Shrinkage via transformadas ondeletas

A filtragem pelo processo de Shrinkage consiste em aplicar a DWT – *Discrete wavelet transform* (Transformada ondeleta discreta) – sobre o vetor contendo o sinal, o que produz um novo vetor a partir do qual se pode separar as partes sinuosa e suave do sinal, isto é, a transformação gera um novo vetor onde as componentes relativas às altas e baixas frequências são separadas. Isto nos permite, se a amplitude das componentes referentes às altas frequências (parte sinuosa) apresentarem valores pequenos em relação às componentes das baixas frequências (parte suave), fazer todos os componentes da parte sinuosa igual à zero, e então tomar a transformada inversa, o que nos retornará um com o sinal original filtrado das altas frequências.

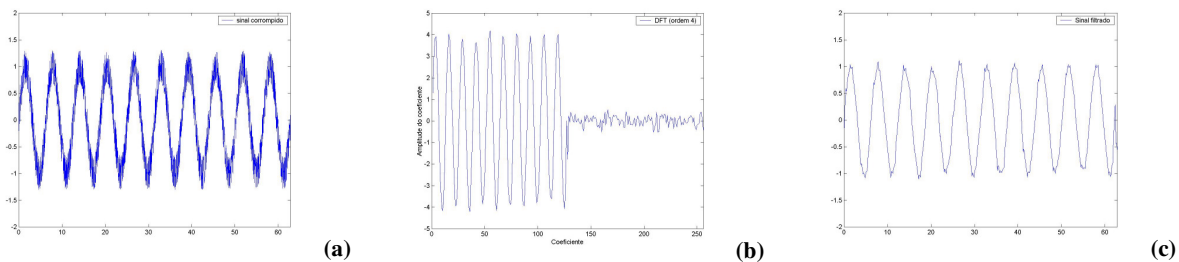


Fig.4 Ilustração do método de Shrinkage utilizando as transformadas ondeletas. Em (a) temos um sinal senoidal do qual se deseja remover o ruído, aplicando a transformada ondeleta somos capazes de separar as partes suave e sinuosa (b), anulando toda a parte sinuosa (componentes de ordem maior que 128) e tomando a transformada inversa obtemos o sinal filtrado sem o ruído (c).

Filtragem por Shrinkage via transformadas de Fourier

O método das transformadas de Fourier consiste em estudar no domínio das frequências uma função originalmente encontrada no domínio do tempo. Deste modo, ao aplicarmos a transformada de Fourier em um sinal periódico estaremos decompondo o mesmo todo o espectro de frequências do mesmo, isto é, o gráfico do espectro irá apresentar picos relativos as frequências contidas neste sinal. A partir do espectro de frequências podemos realizar o método de Shrinkage anulando a amplitude dos componentes relativos as frequências indesejáveis, ou seja, removendo os picos das frequências indesejáveis, e tomando a transformada inversa. O sinal obtido através da transformada inversa será o sinal original filtrado das frequências indesejáveis.

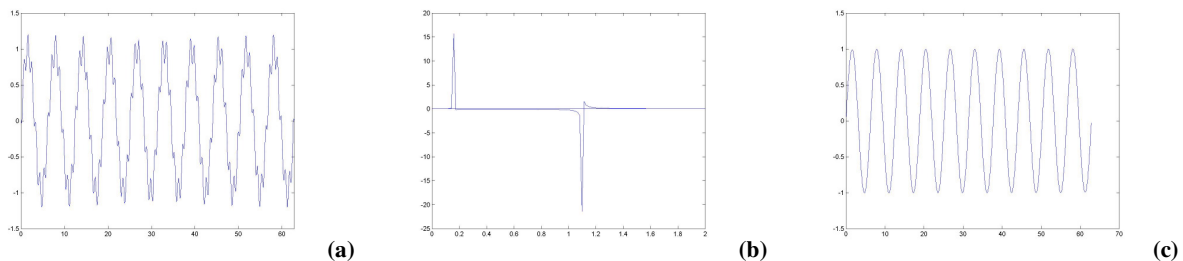


Fig.5 ilustração do método de Shrinkage utilizando as transformadas de Fourier. Em (a) temos um sinal senoidal do qual se deseja remover o ruído, aplicando a transformada de Fourier obtemos o espectro de frequências do sinal (b). Uma vez que a frequência que nos interessa é ($f=1/2\pi \approx 0,16$) o que corresponde ao primeiro pico, anulamos todo o resto do espectro e tomamos a transformada de Fourier inversa obtendo o sinal filtrado (c).

Os estudos realizados permitiram compreender funcionamento e aplicar as técnicas de filtragem digital citadas no presente documento. Com a aplicação das técnicas a diversos tipos de sinais pudemos avaliar a eficiência apresentada por cada um dos filtros estudados em relação ao tipo de sinal. Assim, constatamos que as técnicas estudadas no presente projeto não se aplicam ao tipo de sinal de nosso interesse prático, isto é, ao espectro de potência gerado a partir das Transformadas de Fourier.

Isto nos leva a concluir que apesar dos filtros estudados serem bastante eficientes para diversos tipos de sinais, não podemos aplica-los ao nosso problema, isto é, eliminar o ruído de um espectro de potências gerado a partir das transformadas de Fourier.

WINTER, O.C. & MURRAY, C. D., **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem. I internal orbits**, London, QMW, 1994;

PRESS, W. H. & FLANNERY, B. P. & TEUKOLSKY, S. A. & VETTERLING, W.T., **Numerical recipes, The art of scientific computing**, New York: Cambridge university press, 1990;